

# 動きをデザインする科学

～数学に基づく現象の理解とモノの動きの設計～

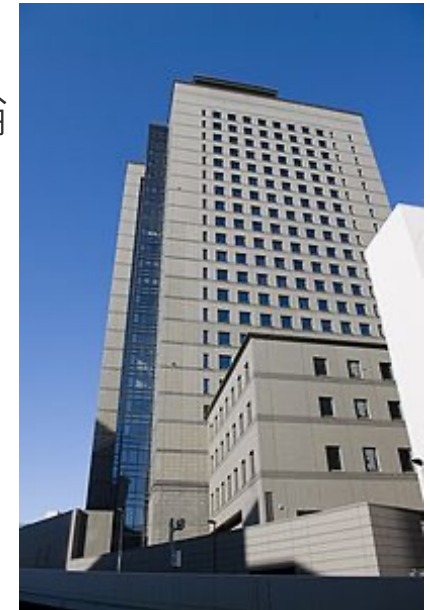
国立情報学研究所

情報学プリンシプル研究系

准教授 岸田昌子

# 自己紹介

- 大阪出身
- 15年近く海外を放浪したのち、2016年から情報研准教授
- 主な研究分野は制御理論と最適化
  - ネットワークを介する制御システムのための制御理論
  - 不確かさが動的システムに与える影響の定量化
  - 上記に現れる最適化問題



今日は制御理論について話します

# 本日の流れ

---

1. はじめに
  - 制御とは？
  - 制御理論とは？
  - 制御理論研究とは？
2. 数学に基づくシステムの理解
3. 数学に基づくモノの動きの設計
4. 深層学習との意外な共通点

はじめに

# 制御とは？

入出力がある動的システムから望みの出力を得るように、自動的に入力を調整する仕組み

モノを思い通りに動かしたい時に使う

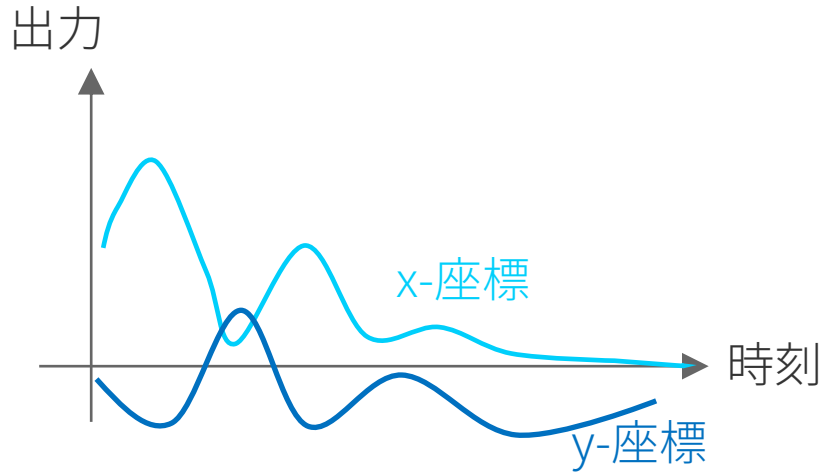
例

- 家庭：エアコン、お風呂の自動お湯張り、お掃除ロボット
- 交通：クルーズコントロール、信号制御
- インフラ：化学プラント、製造プラント、スマートグリッド



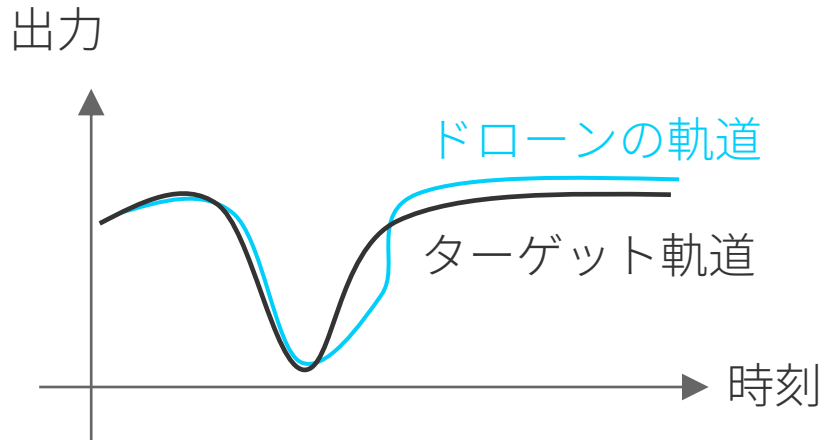
# 制御とは？

## 安定化の問題



ヘリコプターのホバリング

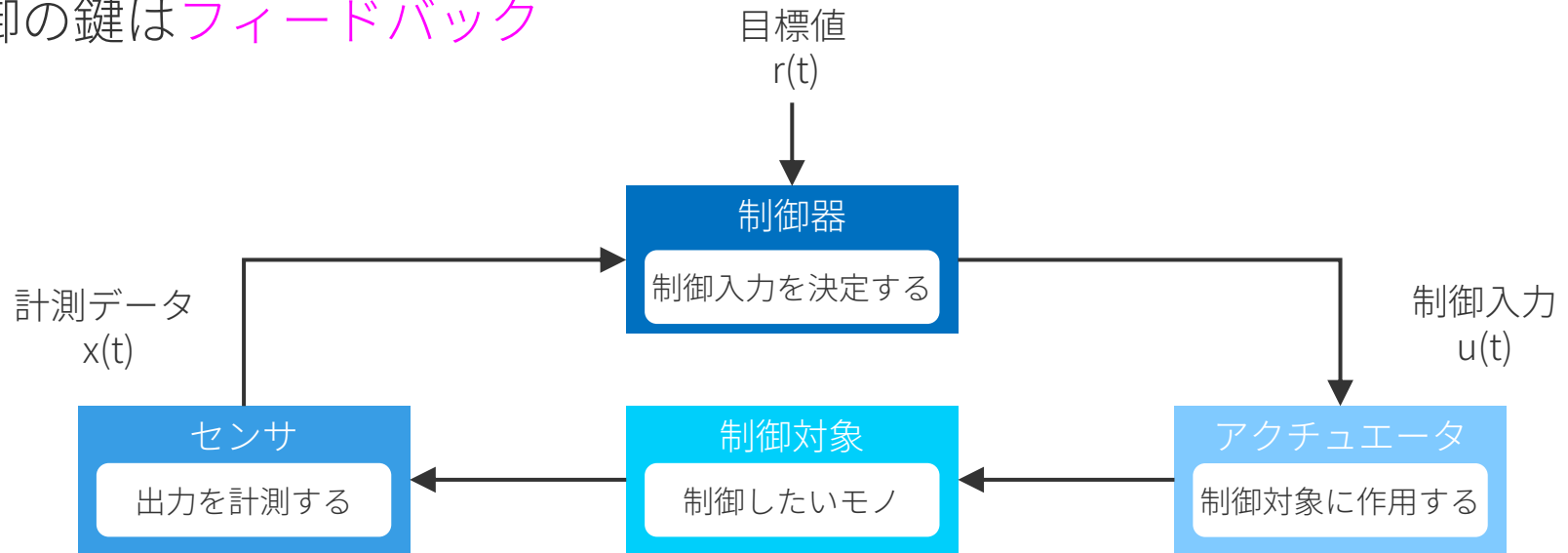
## 追従の問題



ドローンで対象物を追う

# 制御とは？

制御の鍵はフィードバック



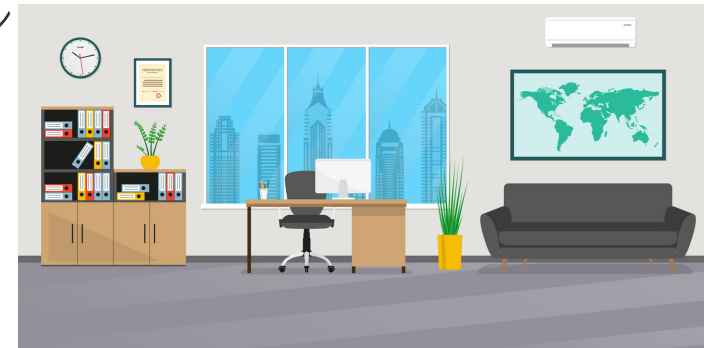
空調の例

制御対象 = 室温

センサ、制御器、アクチュエータ = エアコン

目標値 = 設定温度

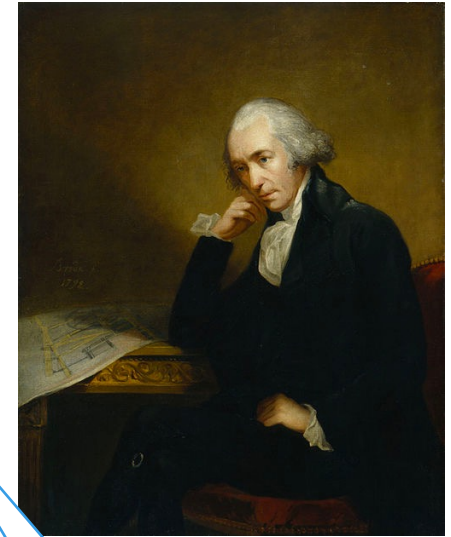
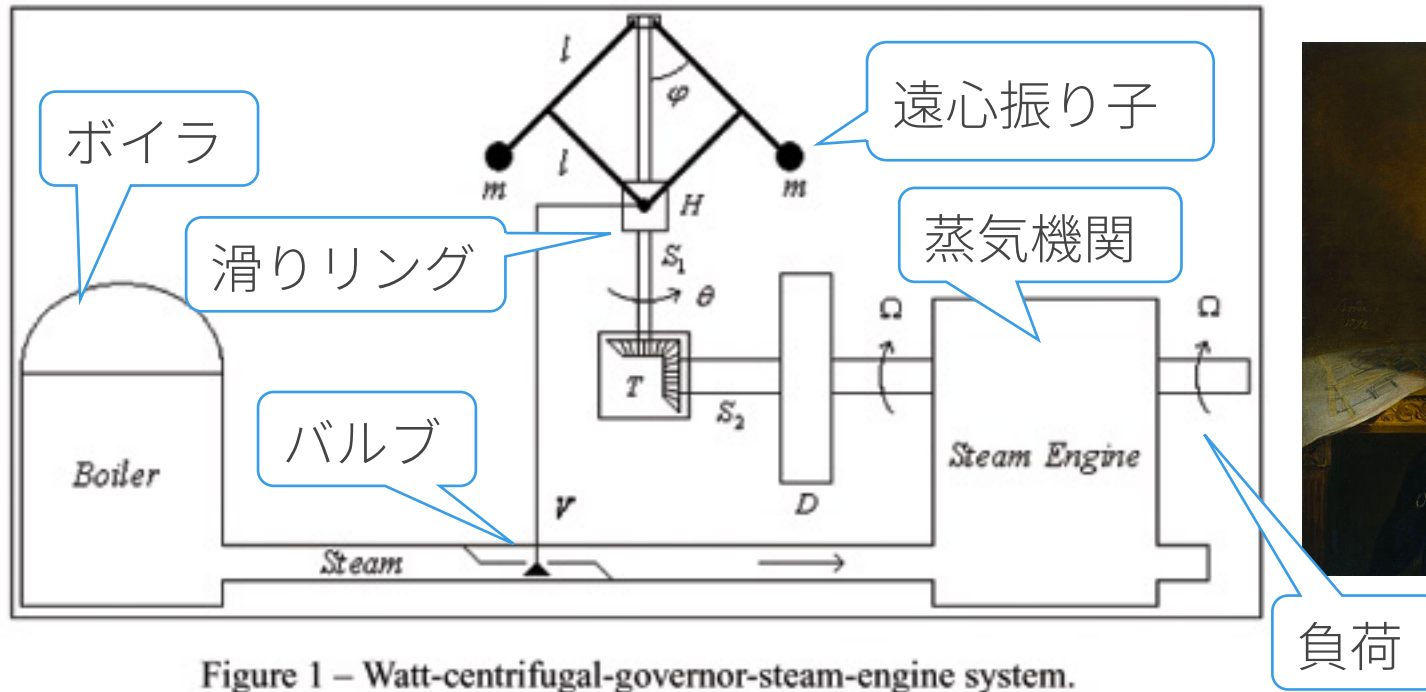
計測データ = 室温



# 制御の始まり (1700年代後半)

## ワット

遠心力を応用して、**蒸気機関**の回転速度を一定に保つ**遠心调速機**を発明  
(1788年)



# サーボ機構（1800年代半ば）

## 蒸気機関から蒸気船へ

大きな船を動かすのは大変

⇒ 蒸気機関を使おう

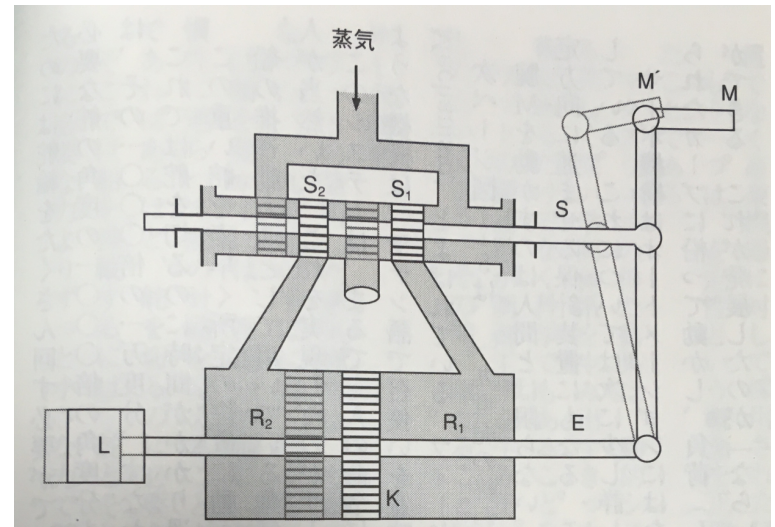
⇒ 大型蒸気船の誕生

⇒ 舵を切るのが大変

⇒ 蒸気を操舵装置に使おう

⇒ **サーボ機構**の誕生

物体の位置、方向、姿勢などを  
制御量とし、**目標値に追従する**  
**ように自動で作動する機構**



# プロセス制御（1900年代初め）

## 化学反応を制御して物質を作る

窒素肥料の材料となるアンモニアが不足

⇒ 空気中の窒素を使おう

⇒ 水素と窒素の混合ガスをアンモニアに変換

⇒ 変換効率が低い

⇒ 未反応ガスを再循環しよう

⇒ アンモニアの反復合成

⇒ プロセス制御の始まり



化学反応の工程を連続化して、温度、圧力、液位、流量などの化学反応や環境に関する条件を制御

今では、石油精製、繊維、薬品、製鉄などの様々なプロセス産業で使われている

# 電子管増幅器（1900年代初め）

## 通信技術の発達

ベルによる電話の発明（1876年）

⇒ 途中で信号が減衰しないように増幅器を設置

⇒ 信号が歪む

⇒ ブラックが出力（出て行く音声電圧）の一部を  
入力（入ってくる音声電圧）側にフィードバックし、  
高品質の音声の増幅を可能にした（1925年）



# 1900年代半ばの制御

---

戦争で必要に迫られて大きく発展



自走式魚雷



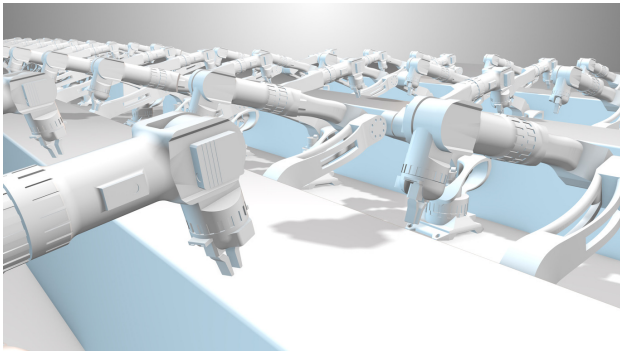
ミサイル



人工衛星

# 現代の制御

機械、航空宇宙、電気、情報などの工学分野のみならず、経済や医学など、  
広範囲で用いられている



こうした技術の数理的なベースとなるのが制御理論

# 制御理論とは？

---

様々な種類の問題を解くために必要な、解析や設計のテクニックを統一的に考える学問

モノを望み通りに動かすために必要な条件や手法などの法則を、数学を使って厳密に導き出す

特に、

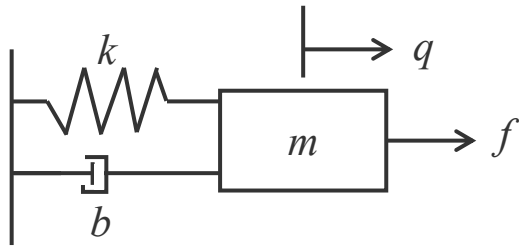
- 数理モデル（微分方程式など）に基づいて、
- 色々な数学を使って数理モデルを解析し、要求に応える適切な制御器の設計を行う

# 制御理論とは？

制御理論の鍵は抽象化

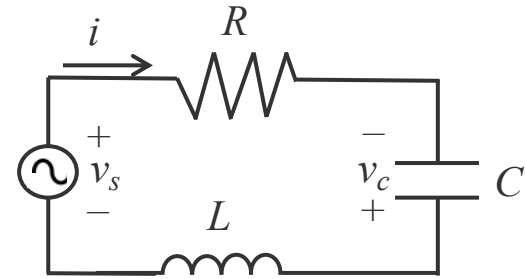
様々なシステムに共通する構造や性質に注目する

力学系



$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = f$$

電気回路



$$LC\ddot{v}_c + RC\dot{v}_c + v_c = v_s$$

異なるシステムも微分方程式は同じ！

この同じ微分方程式が持つ性質について考える

制御理論は色々なモノに使える

# 制御理論とは？

## 制御理論

微分方程式の解を操作する

Handwritten mathematical formulas on a green chalkboard, including:

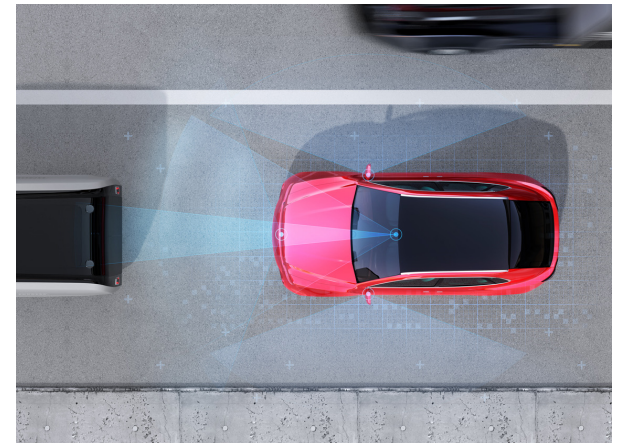
- $\iiint_M z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, d\varphi$
- $\frac{\partial z}{\partial x} = 2; \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \vec{n} = (F_x; F_y; F_z)$
- $\frac{2x}{x^2+2y^2} = 2 \quad g(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad A = [1, 0, 3] \quad z = \frac{1}{x} \arctan \frac{\sqrt{z}}{z}$
- $F_z = 2x \cdot y \cdot z - 1 = 1 \quad x = \tan t \quad y = \left(\frac{\arctan t}{\beta}\right) \quad e^{-x} y z = e; A[0, e, 1]$
- $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}; x = \tan t \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} -x \\ -p \\ -\beta \end{pmatrix}$
- $x^2 + x^2 + y^2 + z^2 + x y z - 6 = 0 \quad \eta_1 = \lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 1 + 0 \quad \frac{\sin x}{x} \leq \frac{x}{1} \quad X_2 = \begin{pmatrix} -x \\ -p \\ -\beta \end{pmatrix}$
- $\lambda x - y + z = 1 \quad \lambda_2 = i\sqrt{14} \quad Y_{(1)} = Y_1 + b_1 k_2 \quad k_1 + b_1 \neq 0; p \neq 0 \quad A+B+C=8$
- $x + y + z = 2 \quad 2 \arctan x - x = 0, I = (1, 10) \quad \cos p = \frac{(1, 0) \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})}{\sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}}} \quad -3A - 7B + 2C = -10, 3$
- $x + y + 2z = 2 \quad \cos p = \frac{(1, 0) \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})}{\sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}}} \quad -18A + 6B - 3C = 15$
- $y \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = (6 - x^2 + 16y^2 - 4z^2) > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{3n^2 + 2n - 1}} \quad \int_0^1 \frac{3x^2 + 1}{16x^2 + 1} dx \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{t}\right)^n \quad X_1 = \begin{pmatrix} 2p \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & x_2^2 & 1 \\ y_1 & 1 & y_2^2 & 1 \\ z_1 & 1 & z_2^2 & 1 \end{pmatrix}; x=0, y=1, z=2 \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^4 x \cdot \cos^3 x \, dx \quad y' - \frac{\sqrt{y}}{x+2} = 0; y(0) = 1$
- $f(x) = 2^{-x} + 1, \epsilon = 0.005 \quad x, y, z \in \mathbb{C} \quad x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=0}^n (p_i(x_i) - y_i)^2 \quad \int_0^1 x \sqrt{\frac{\ln x}{x+1}} dx$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \frac{2}{5} \quad \frac{\partial}{\partial p_i} = \sqrt{10, 16} \quad \int_0^1 x \sqrt{\frac{\ln x}{x+1}} dx$
- $2x^2 y y' + y^2 = 2 \quad (1+e^x) y' = e^x \quad y(1) = 1$

数理モデリング

設計の実装

## 実世界

動きをデザインする



数学を使ってシステムを  
解析し、制御器を設計する

# 制御理論とは？

---

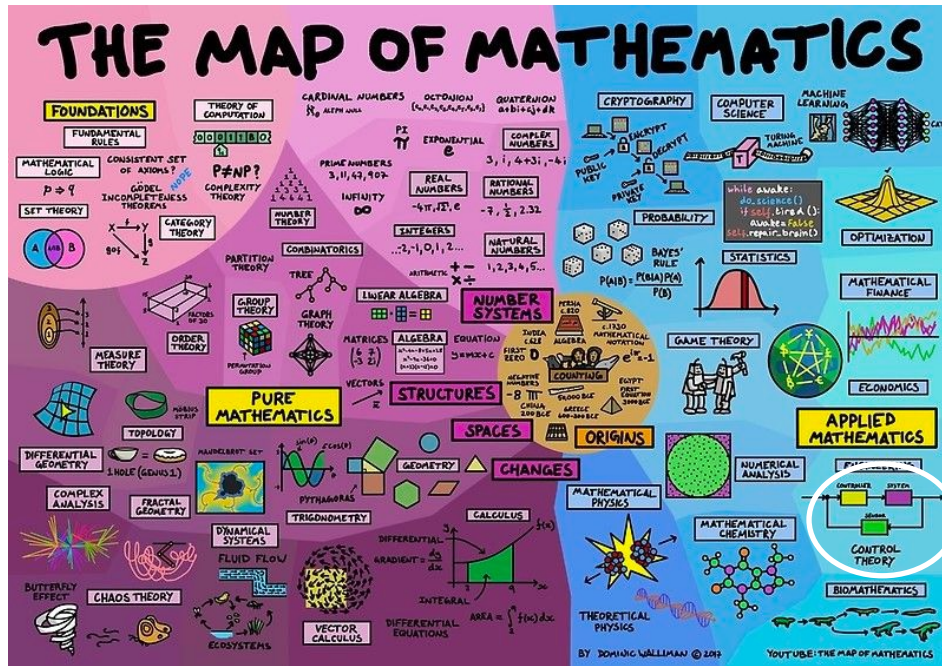
## システムを理解する

- システムは安定か、それとも不安定か？
- うまく制御器を設計すると安定になるようなシステムなのか、どうやっても無理なのか？
- 制御器が機能するために十分な計測データが取れるのかどうか？

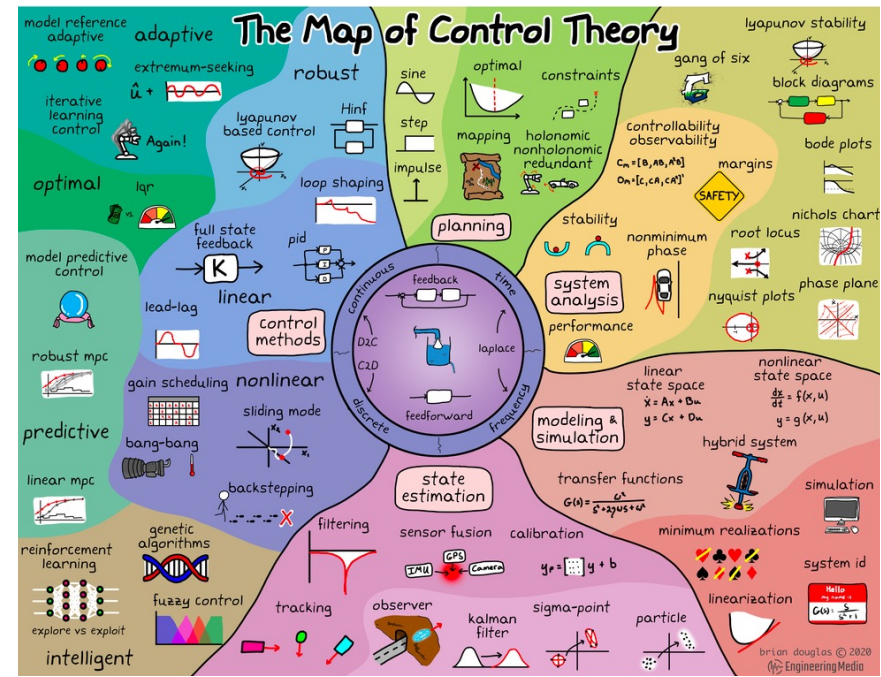
## モノを思い通りに動かしたい

- 不安定なシステムを安定化させたい
- できるだけ早く出力を指令値に近づけたい（エアコンなど）
- できるだけ省エネルギーで出力を指令値に近づけたい

# 制御理論研究とは？



<https://mymodernmet.com/science-infographics-dominic-walliman/>



<https://engineeringmedia.com/>

基礎研究

応用研究

抽象レベル高

具体レベル高

行列の性質解析  
微分方程式の解析と入力による解の操作  
線形行列不等式の解析と半正定値計画  
非凸最適化問題の緩和手法構築

具体的な状況の理想モデル  
(方程式) に対する  
アルゴリズムと最適化を含む  
フィードバック則の構築

空調の制御  
UAVの制御

# 制御理論研究とは？

基礎研究

応用研究

抽象レベル高

具体レベル高

行列の性質解析  
微分方程式の解析と入力による解の操作  
線形行列不等式の解析と半正定値計画  
非凸最適化問題の緩和手法構築

具体的な状況の数理モデル  
(方程式) に対する  
アルゴリズムと最適化を含む  
フィードバック則の構築

空調の制御  
UAVの制御

To convert this apparatus into a governor, let us assume viscosities  $X$  and  $Y$  in the motions of the main shaft and the centrifugal piece, and a resistance  $G\phi$  applied to the main shaft. Putting  $\frac{dA}{d\phi} \omega = K$ , the equations become

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + X \frac{d\theta}{dt} + K \frac{d\phi}{dt} + G\phi = L, \quad (9)$$

$$B \frac{d^2\phi}{dt^2} + Y \frac{d\phi}{dt} - K \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (10)$$

The condition of stability of the motion indicated by these equations is that all the possible roots, or parts of roots, of the cubic equation

$$ABn^3 + (AY + BX)n^2 + (XY + K^2)n + GK = 0 \quad (11)$$

shall be negative; and this condition is

$$\left(\frac{X}{A} + \frac{Y}{B}\right)(XY + K^2) > GK. \quad (12)$$

J.C. Maxwell, On Governors, 1868

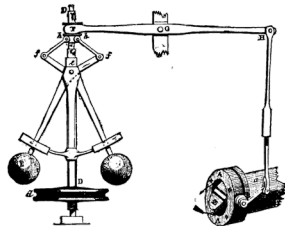


Fig. 4.—Governor and Throttle Valve.

**Theorem 1.** Assume that  $L$  is of type (2) and that the conditional distribution function  $F(\xi)$  defined by (1) is:

(A) symmetric about the mean  $\bar{\xi}$ :

$$F(\xi - \bar{\xi}) = 1 - F(\bar{\xi} - \xi)$$

(B) convex for  $\xi \leq \bar{\xi}$ :

$$F(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) \leq \lambda F(\xi_1) + (1-\lambda)F(\xi_2)$$

for all  $\xi_1, \xi_2 \leq \bar{\xi}$  and  $0 \leq \lambda \leq 1$

Then the random variable  $x_1^*(t_1|t)$  which minimizes the average loss (3) is the conditional expectation

$$x_1^*(t_1|t) = E[x_1(t_1)|y(t_0), \dots, y(t)] \quad (5)$$

R.E. Kalman,  
A New Approach to Linear Filtering  
and Prediction Problems, 1960

**Theorem 2.1 (Quadratic Programming Polynomially Reduces to a  $\mu$  Problem):** Define

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & kw \\ kA & 0 & kA\bar{x} \\ \bar{x}^T A + p^T & w^T & \bar{x}^T A\bar{x} + p^T \bar{x} + c \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\Delta = \{\text{diag}[\delta_1^r, \dots, \delta_n^r, \delta_1^r, \dots, \delta_n^r, \delta^c] | \delta_i^r \in \mathcal{R}; \delta^c \in \mathcal{C}\}, \quad (5)$$

$$\tilde{\Delta} = \{\text{diag}[\delta_1^r, \dots, \delta_n^r, \delta_1^r, \dots, \delta_n^r, \delta_{n+1}^r] | \delta_i^r \in \mathcal{R}\}, \quad (6)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(b_u + b_l), \quad (7)$$

$$w = \frac{1}{2}(b_u - b_l). \quad (8)$$

Then  $\mu_\Delta(M) = \mu_{\tilde{\Delta}}(M)$ , and

$$\mu_\Delta(M) \geq k \Leftrightarrow \max_{b_l \leq x \leq b_u} |x^T A x + p^T x + c| \geq k. \quad (9)$$

R.D. Braatz et al,  
Computational Complexity of  $\mu$  Calculation, 1994

# 制御理論研究とは？

基礎研究

応用研究

抽象レベル高

具体レベル高

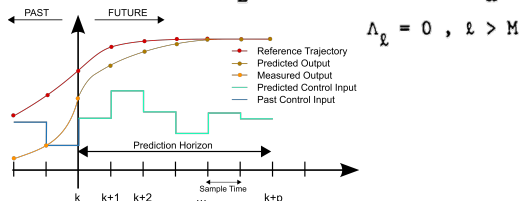
行列の性質解析  
微分方程式の解析と入力による解の操作  
線形行列不等式の解析と半正定値計画  
非凸最適化問題の緩和手法構築

具体的な状況の数値モデル  
(方程式) に対する  
アルゴリズムと最適化を含む  
フィードバック則の構築

空調の制御  
UAVの制御

$$\min_{\Delta m(k) \dots \Delta m(k+M-1)} \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^P \{ || r_{\ell} [\hat{y}(k+\ell) - y_S(k+\ell)] ||^2 + || \Lambda_{\ell} \Delta m(k+\ell-1) ||^2 \}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \hat{y}(k+\ell) = \hat{y}^*(k+\ell) \\ & + \sum_{i=1}^{\ell} a_{mi} \Delta m(k+\ell-i) \\ & + \hat{d}(k+\ell) \\ & y_L(k+\ell) \leq \hat{y}(k+\ell) \leq y_H(k+\ell), \ell = 1, 2, \dots, P \\ & m_L(k+\ell-1) \leq m(k+\ell-1) \leq m_H(k+\ell-1), \ell = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (8)$$



Advances in Industrial Model-Predictive Control, Garcia and Prett, 1986

$$t_0 = 0, \quad t_{k+1} = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid t > t_k \wedge z^T(t)\Psi z(t) = 0\}.$$

We start with a linear plant

$$\frac{d}{dt}x_p = A_p x_p + B_p u, \quad x_p \in \mathbb{R}^{n_p}, u \in \mathbb{R}^{n_u}$$

and assume that a linear feedback control law

$$u = Kx_p$$

$$\frac{d}{dt}V(x_p(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_p}(A_p + B_p K)x_p = -x_p^T Q x_p,$$

$$\frac{d}{dt}V(x_p(t)) \leq -\sigma x_p^T Q x_p$$

$$u(t) = u(t_k) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}[, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$e(t) = x_p(t_k) - x_p(t) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}[, \quad k \in \mathbb{N}. \quad \Psi = \begin{bmatrix} (\sigma-1)Q & PB_p K \\ K^T B_p^T P & 0 \end{bmatrix}, \quad z(t_k) = \begin{bmatrix} x_p(t_k) \\ e(t_k) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p K x_p(t_k) \\ &= A_p x_p(t) + B_p K x_p(t_k) + B_p K (x_p(t) - x_p(t_k)) \\ &= A_p x_p(t) + B_p K x_p(t) + B_p K e(t). \end{aligned}$$

We can now use this expression to rewrite the time derivative of  $V(x_p(t))$  as

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x_p(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x_p}(A_p + B_p K)x_p(t) + \frac{\partial V}{\partial x_p}B_p K e(t) \\ &= -x_p^T(t)Qx_p(t) + 2x_p^T(t)PB_p K e(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Substituting (7) in inequality (5) we arrive at

$$\begin{bmatrix} x_p^T(t) & e^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sigma-1)Q & PB_p K \\ K^T B_p^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \leq 0. \quad (8)$$

The triggering times  $t_k$  can now be defined as the times at which the following equality holds

$$z^T(t_k)\Psi z(t_k) = 0 \quad (9)$$

with

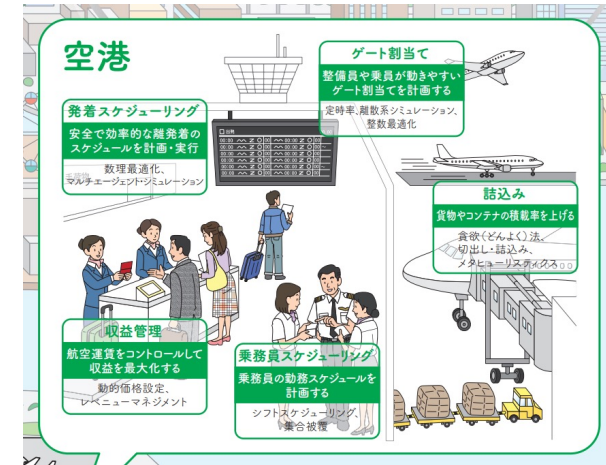
An Introduction to Event-triggered and Self-triggered Control, Heemels 2012

# 近い領域との違い（私的見解です）

## 数理最適化と制御の違い

- 数理最適化は時間によって変化しないものが対象
- 制御は時間によって変化するものが対象

数理最適化



<http://www.orsj.or.jp/members/poster.pdf>

## 制御工学と制御理論の違い（強いて言えば）

- 制御工学は具体的な制御対象に対する工学的アプローチ
- 制御理論は抽象化した数理モデルに対する数学の理論

制御工学



制御理論

We start with a linear plant

$$\frac{d}{dt}x_p = A_p x_p + B_p u, \quad x_p \in \mathbb{R}^{n_p}, u \in \mathbb{R}^{n_u}$$

and assume that a linear feedback control law

$$u = Kx_p$$

# 数学に基づく システムの理解

# 数理モデリングの基本

ニュートンの運動方程式

$$F = ma$$

力 = 質量 x 加速度



実験やニューラルネットワークから作ることもあるが、  
基本は運動方程式から導く

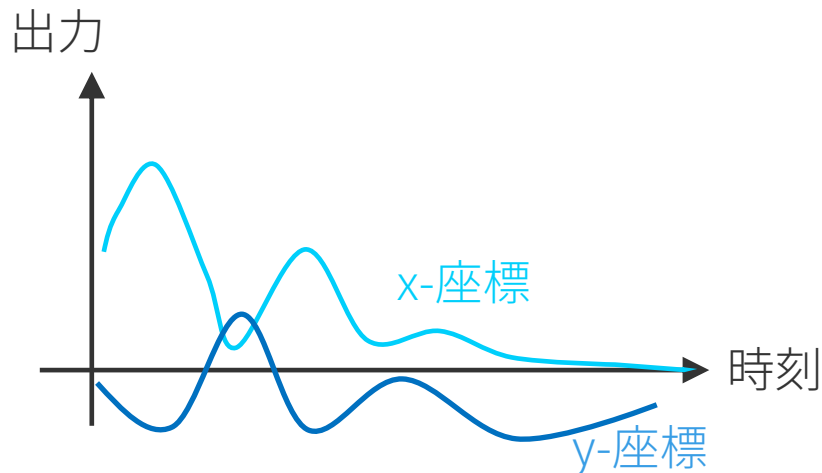
$$\dot{x} = f(x, u, w) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Ew$$

# 安定性

制御の大きな目的の一つはシステムを安定にすること

ざっくり言うと、

- 安定なシステムとは、少々外乱が入っても放置していれば、始めのところに落ち着くシステム
- 不安定なシステムとは、少しでも外乱が入ると始めのところからどんどん離れていくシステム



# 安定なシステムと不安定なシステム

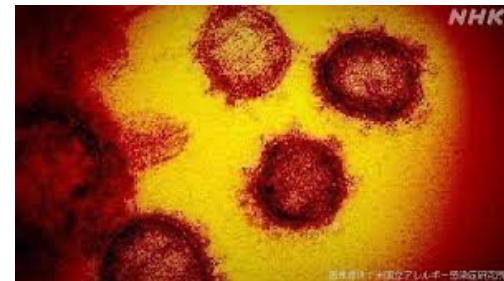
## 安定なシステム

- 起き上がり小法師
- ブランコ



## 不安定なシステム

- バランス棒ゲーム
- 感染症の拡大

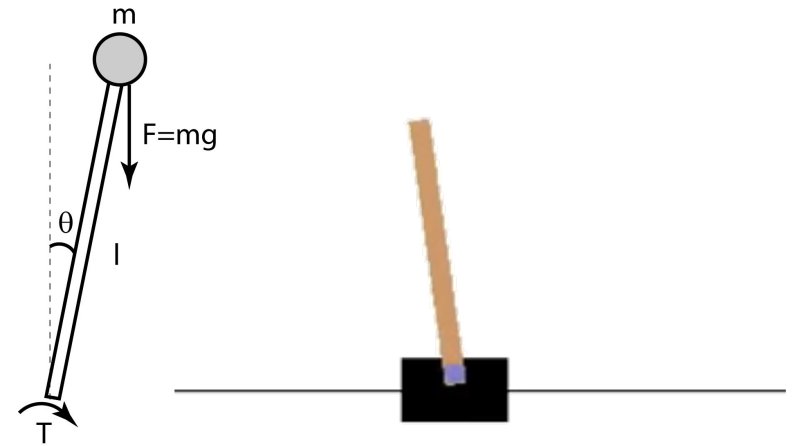


# 数理モデルから安定性を判別する

Segwayを例にして考える



<https://news.sky.com/story/wheels-come-off-segway-personal-transporter-axed-after-high-profile-crashes-12013781>



<https://gym.openai.com/envs/CartPole-v1/>

[https://people.kth.se/~crro/segway\\_challenge/model.html](https://people.kth.se/~crro/segway_challenge/model.html)

# 数理モデルから安定性を判別する

- まずはニュートンの運動方程式から数理モデルを作る  
ニュートンの運動方程式の回転バージョン

$a$ の代わり

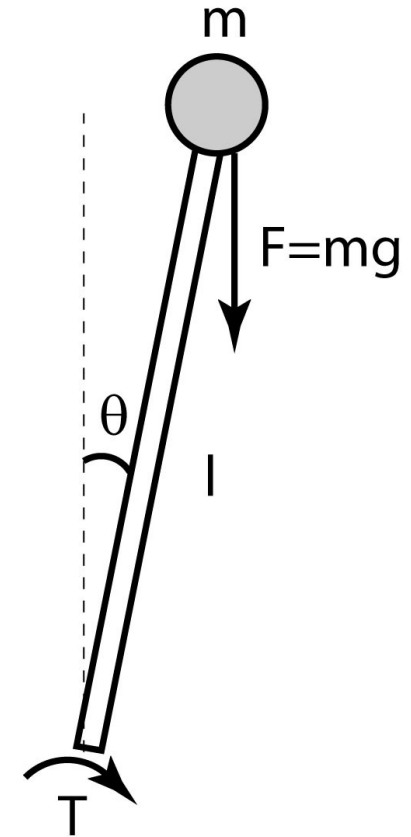
重力による力

$$ml^2\ddot{\theta} = T(t) + mgl \sin \theta - b\dot{\theta}$$

$m$ の代わり

地面からのトルク

回転軸の粘性摩擦



- 簡単にするため線形化する  
 $\sin \theta$ はおおよそ  $\theta$  なので

$$ml^2\ddot{\theta} = T(t) + mgl\theta - b\dot{\theta}$$

- ちなみに書き換えると

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{ml^2} & \frac{g}{l} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \frac{1}{ml^2} \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

# 数理モデルから安定性を判別する

- まずトルクがゼロと仮定してみる

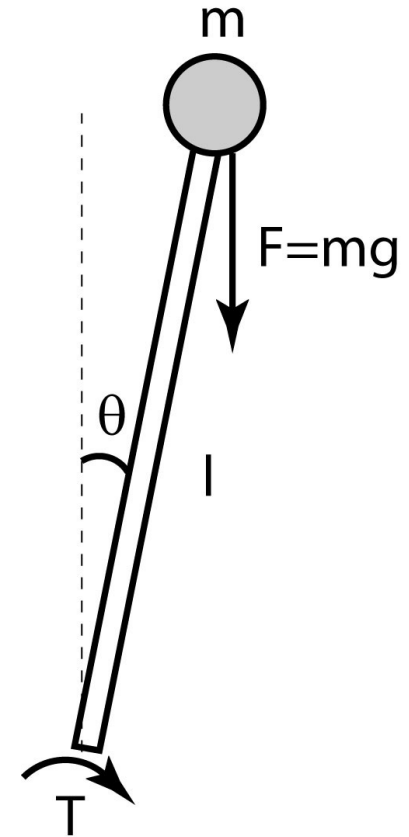
$$\ddot{\theta} + a_1 \dot{\theta} + a_2 \theta = 0$$

$$a_1 = b/ml^2, \quad a_2 = -g/l$$

- このシステムは安定？

実は数式を解かなくても分かる！

- 答えだけ言うと不安定、なぜなら安定であるためには  $a_1$  と  $a_2$  の両方が正の数でないといけないから



# 数理モデルから安定性を判別する

---

なんで？

- （大学1年生の数学で習う） 事実

$$\ddot{\theta} + a_1\dot{\theta} + a_2\theta = 0$$

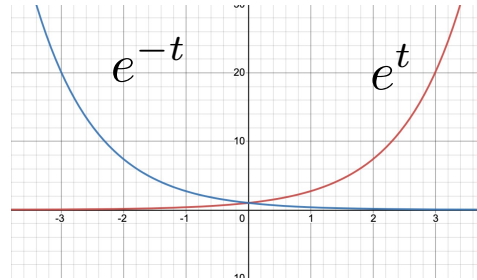
の解は  $\theta = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$  という形をしている

- ここで、 $c_1$ と $c_2$ は初期条件から決まる定数で、 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ は  $s^2 + a_1 s + a_2 = 0$  の解、二次方程式の解の方式から

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

# 数理モデルから安定性を判別する

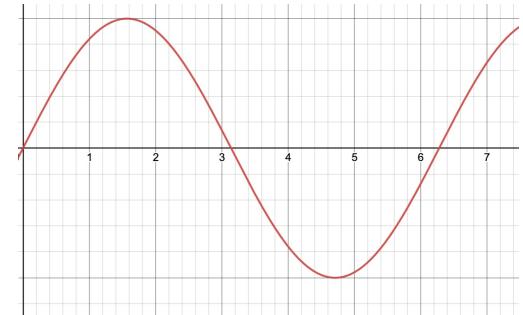
関数  $e^{\lambda t}$  の挙動



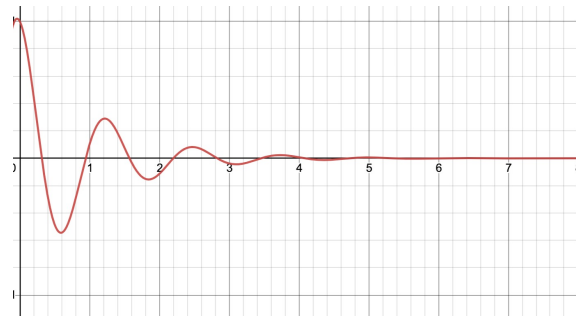
$$\theta = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

- $\lambda_1$ と $\lambda_2$ が実数の時  
上のグラフの重ね合わせなので、一方でも正なら $\theta$ はどんどん大きくなる

- $\lambda_1$ と $\lambda_2$ が純虚数の時  
複素共役の関係で現れるので、三角関数になる  
つまり $\theta$ は振動する



- $\lambda_1$ と $\lambda_2$ が複素数の時  
上の2つの組み合わせ



# 数理モデルから安定性を判別する

---

なので、安定であるためには、 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ の実数部分は負の数でないといけない

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

つまり  $\operatorname{Re}(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}) < 0$  かつ  $\operatorname{Re}(-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}) < 0$

まとめると、安定であるためには  $a_1 > 0$  かつ  $a_2 > 0$  が必要

いま  $\ddot{\theta} + a_1\dot{\theta} + a_2\theta = 0$

$$a_1 = b/ml^2, \quad a_2 = -g/l$$

で、 $a_2 < 0$  なので不安定

計算しなくても安定かどうか分かった！

# 数学に基づく モノの動きの設計

# パラメータをうまく選んで制御してみる

さっきのモデルで、制御入力としてトルク $T(t)$ を使って安定化できるか考える

$$ml^2\ddot{\theta} = T(t) + mgl \sin \theta - b\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + a_1\dot{\theta} + a_2\theta = b_0T(t), \quad b_0 = 1/ml^2$$

手のひらで棒のバランスをとる時は角度と角速度を見ているので、制御入力もそのような形にしてみる

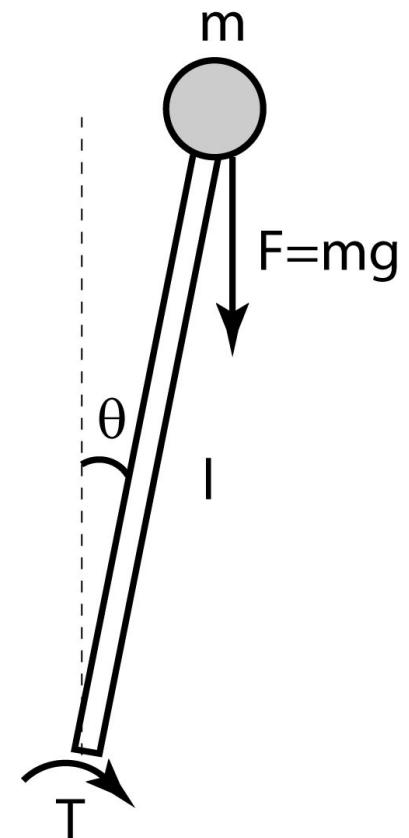
$$T = -k_1\dot{\theta} - k_2\theta$$

ここではまだ $k_1$ と $k_2$ の値は分からない

ひとまずこの式を代入してみる

$$\ddot{\theta} + (a_1 - b_0k_1)\dot{\theta} + (a_2 - b_0k_2)\theta = 0$$

これはさっきの式  $\ddot{\theta} + a_1\dot{\theta} + a_2\theta = 0$  と似ている！



# パラメータをうまく選んで制御してみる

なので方程式  $\ddot{\theta} + (a_1 - b_0 k_1)\dot{\theta} + (a_2 - b_0 k_2)\theta = 0$

の解はさっきの議論と同じく

$$\theta = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

なので、安定にするためには

$$a_1 - b_0 k_1 > 0, a_2 - b_0 k_2 > 0$$

となるように $k_1$ と $k_2$ を選べば良い

つまり、 $k_1 < a_1/b_0, k_2 < a_2/b_0$

安定にする制御器はたくさんある



# さまざまな設計の方法

---

少しくらいパラメータがわからなくてもきちんと動くようにする方法

⇒ ロバスト制御

少しくらいパラメータが変化してもきちんと動くようにする方法

⇒ 適応制御

システムの非線形要素が無視できない時に使う方法

⇒ 非線形制御（スライディングモードなど）

制御入力や状態に色々な制約がある時に使う方法

⇒ モデル予測制御（繰り返し最適化問題を解く方法）

なんらかの評価関数（コスト＝－利益）を小さくしたい時に使う方法

⇒ 最適制御

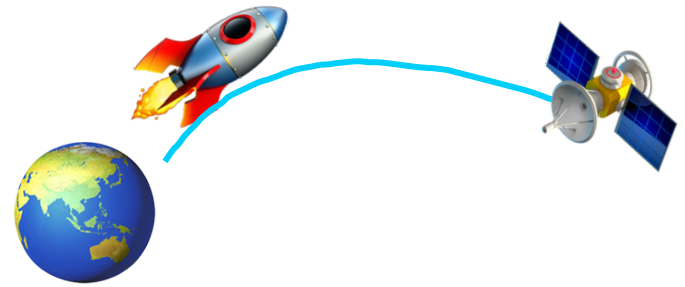
# 最適制御理論の話

最適制御問題では、与えられたコストを最小化するような制御入力を求める

## 最小燃料問題

A地点を出発してB地点まで、  
できるだけ少ない燃料で到達する

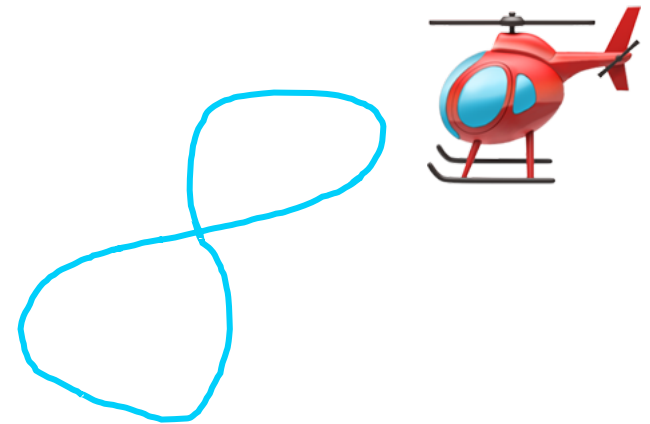
コスト＝燃料



## 追従制御問題

決められた軌道に沿って移動する

コスト＝実際の軌道と決められた軌道の差



# 最適制御理論の話

数式で書くと、最適制御問題とは、

制御対象のシステム

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x(t_0) = x_0$$

を与えられた時、コスト関数

$$J = \int_0^{t_f} L(x(t), u(t)) dt + \phi(x(t_f))$$

を最小化する制御入力 $u$ を求める問題

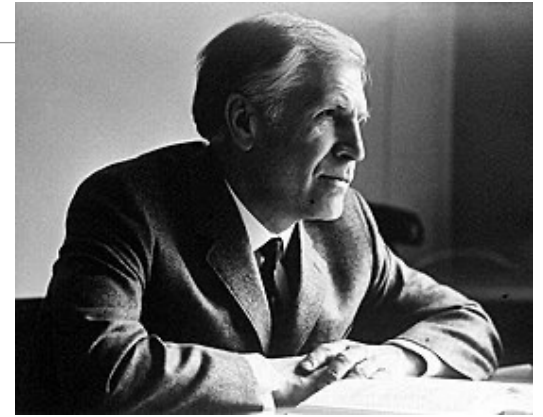
- 実は関数  $f$  や  $L$ ,  $\phi$  が分かっているとしても、解析的に解くのはほぼ無理
- コンピュータを使って解く



# 最適制御理論の話

ポントリャーギンの最大値原理 (1956年)

最適制御理論における最も重要な結果



<https://ru.wikipedia.org/>

$$\begin{aligned} &\text{maximize } J = \int_0^{t_f} L(x(t), u(t)) dt + \phi(x(t_f)) \\ &\text{subject to } \dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, t_f] \end{aligned}$$

に対し、 $H(x, u, \lambda, t) = \lambda^\top f(x, u) + L(x, u)$  とすると  $(x(t), u(t))$  が最適であるならば  $\lambda$  が存在して次を満たす(最適性の必要条件)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \lambda(t_f) = 0$$

# 最適制御理論の話

---

解析解は存在しないので数値計算で頑張って解く

例：勾配法

1.  $u(t)$ を $t=0$ から $t=t_f$ まで適当に決める
2. 1で決めた $u(t)$ を使って、方程式  $\dot{x} = f(x, u)$  と初期値  $x(t_0) = x_0$ から $x(t)$ を求める
3.  $\lambda(t_f) = 0$  を使って随伴変数の方程式  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ , を後ろ向きに解いて $\lambda(t)$ を求める
4.  $u(t), x(t), \lambda(t)$  を使って、各時刻のハミルトニアン $H$ の $u$ の変分  $s = -\frac{\partial H}{\partial u}$ を  
求める ( $s$ のノルムの時間積分が小さければ終了)
5.  $u$ を $u + \alpha s$ としてステップ2に戻る  
ここで $\alpha$ は $J(u + \alpha s)$ が最小になるように選ぶ (直線探索)

# 深層学習との意外な 共通点

# 深層学習との意外でない共通点

- （深層）強化学習とは、データを用いて望ましい結果を得るために、力学系等の操作を決定する方法（を研究する学問）

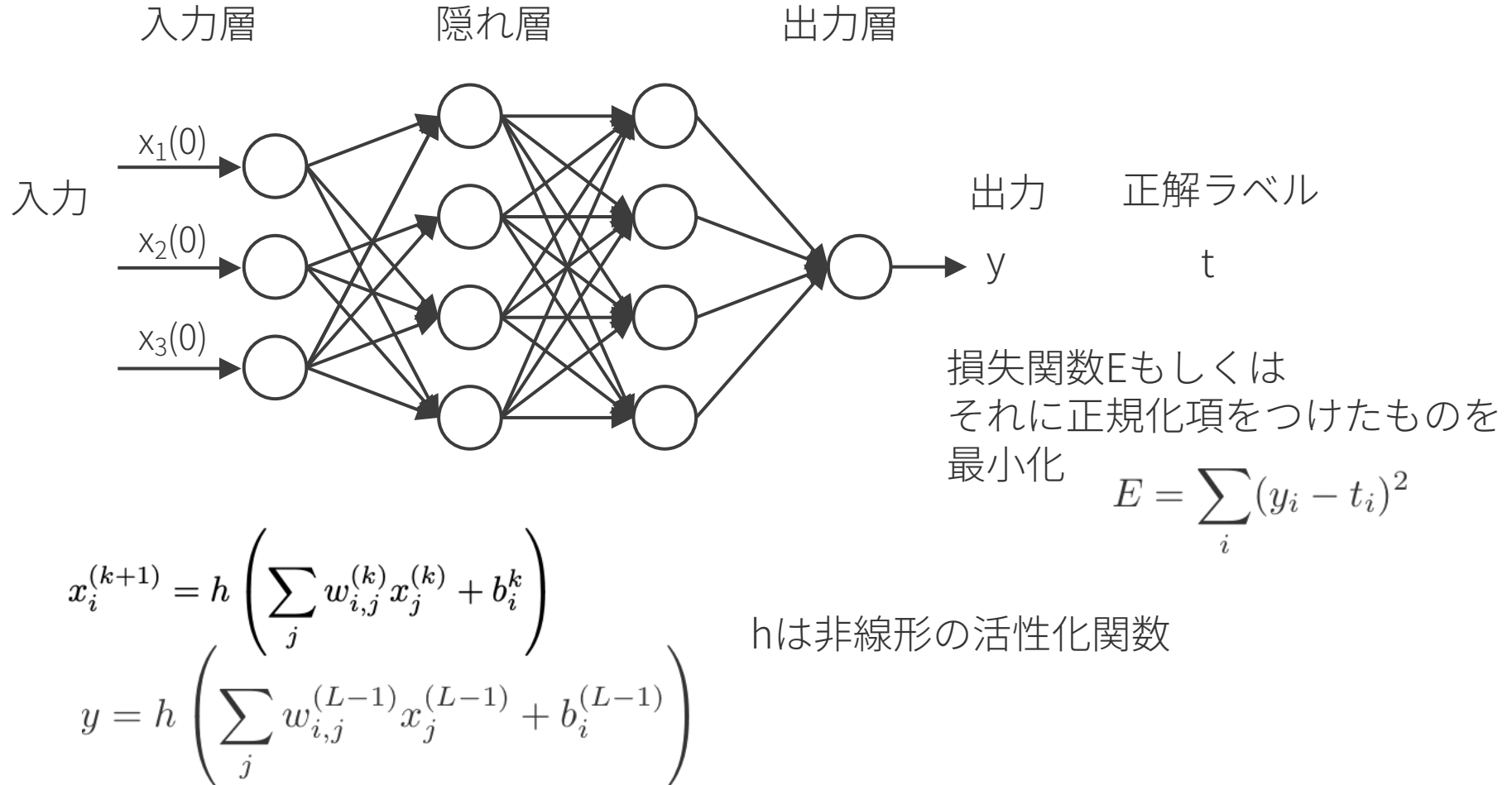
⇒ 制御理論も強化学習も目的は同じ（ただし、一般に制御理論ではプラントは既知で強化学習で環境は未知）

| 制御理論      | 強化学習   |
|-----------|--------|
| プラント、制御対象 | 環境     |
| 制御器       | エージェント |
| 制御入力      | 行動     |
| 制御則       | 方策     |
| コスト関数     | 価値関数   |

- 強化学習に限らず、深層学習で数理モデルを作った後、制御理論を使うなど、組み合わせて使うこともできる

# 深層学習とは？

ディープニューラルネットワークを訓練してモデルを得ること



# 最適制御問題を離散化する

- 簡単のために時間方向に離散化してみる  $\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t}$

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \longrightarrow \quad x[k + 1] = f_d(x[k], u[k])$$

- 最適制御問題を離散化すると

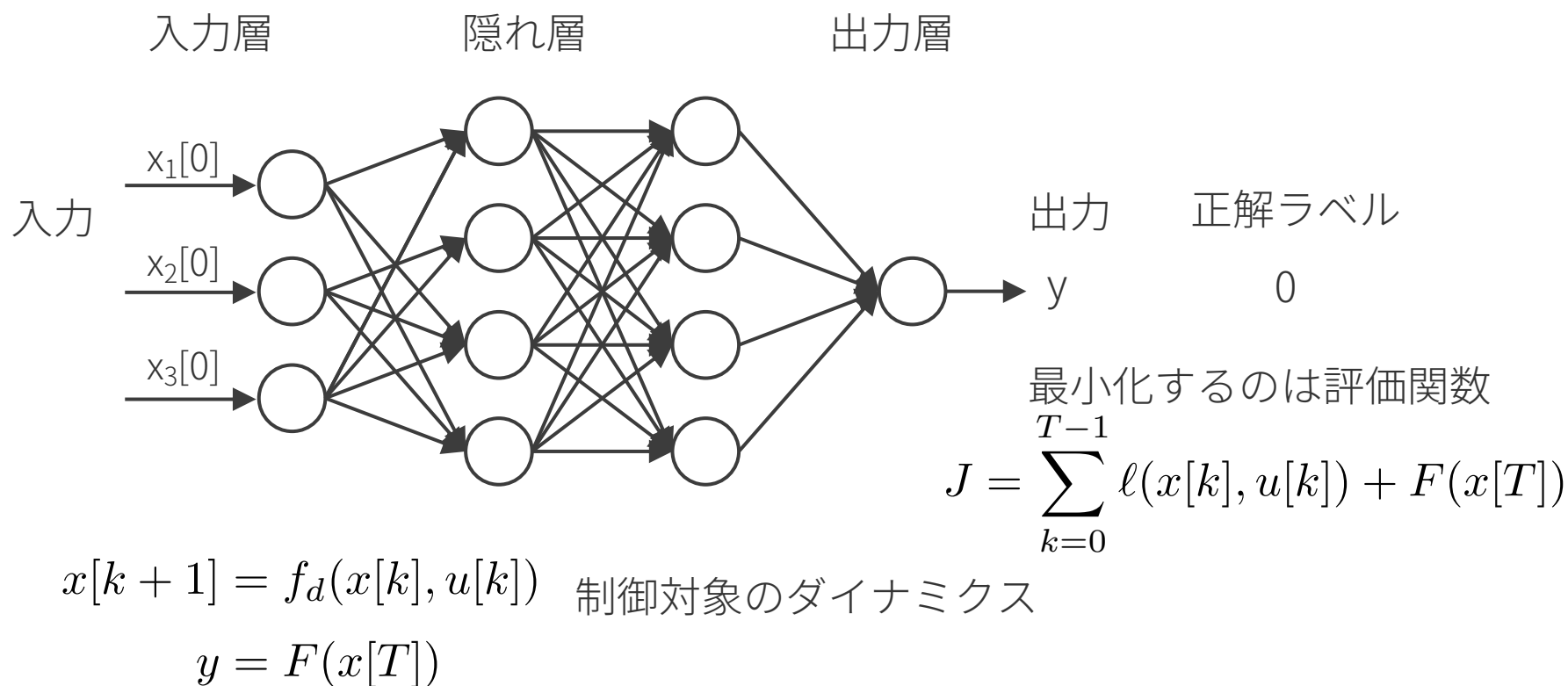
$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & J = \int_0^{t_f} L(x(t), u(t)) dt + \phi(x(t_f)) \\ \text{subject to} \quad & \dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, t_f] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{k=0}^{T-1} \ell(x[k], u[k]) + F(x[T]) \end{aligned}$$

$$\text{subject to } x[k + 1] = f_d(x[k], u[k]), \quad x[0] = x_0$$

# 離散化した最適制御問題をDNNとして見てみる

離散化した最適化制御問題はDNNの訓練で解くことができる



実際このことはLeCunが言及してたり、NeuralODEは昔からある最適制御問題の数値解法がベースになってる

# 最近の私の研究成果

---

査読中につき削除

# 最近の私の研究成果

---

査読中につき削除

# 本日のまとめ

---

1. はじめに
  - 制御とは？
  - 制御理論とは？
  - 制御理論研究とは？
2. 数学に基づくシステムの理解
3. 数学に基づくモノの動きの設計
4. 深層学習との意外な共通点